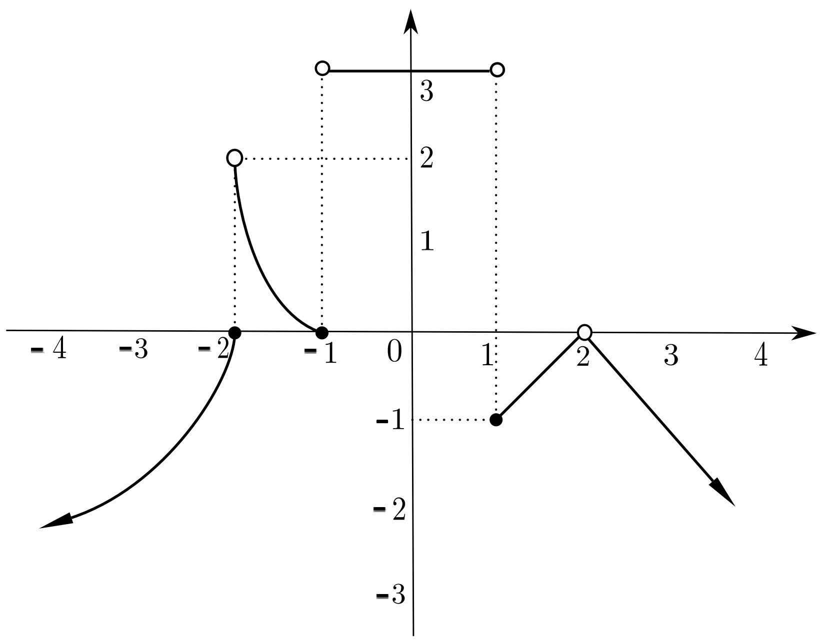
Prueba N°1

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Instrucciones: • **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
• Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
• La prueba dura 100 minutos.

1) [**20 pts.**] Considere la función $f(x)$ dada por la siguiente gráfica:



Ademas considere la función $g(x) = \sqrt{x+1} - 2$. Determine:

a) [**4 pts.**] Dominio y Recorrido de $f(x)$.

b) [**4 pts.**] Dominio y Recorrido de $g(x)$.

c) [**4 pts.**] Indique el Dominio de $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ y de $(f \circ g)(x)$.

d) [**4 pts.**] Determine $(g \circ f)(1)$ y $(f + g)(0)$.

e) [**4 pts.**] Pruebe que $g(x)$ es inyectiva y determine $g^{-1}(x)$ indicando su dominio y Recorrido.

2) [**10 pts. c/u**] Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 = 0$.

b) $\log(\sqrt{7-x}) = \log\left(\sqrt{\log(100) + 10}\right) - \log(\sqrt{x+1})$

3) a) [**5 pts. c/u**] Pruebe las siguientes identidades trigonométricas:

I) $\dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{\tan(x) - \tan(y)} = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$ II) $\dfrac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \cos(2x)$

b) [**10 pts.**] Determine todas las soluciones de la siguiente ecuación que se encuentran en el intervalo $[0, 2\pi[$:

$$\cot^3(x) - 3\cot(x) = 0$$

Desarrollo

1) a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y $\text{Rec}(f) =]-\infty, 2[\cup\{3\}$. (2+2 pts.)

   b) $\text{Dom}(g) = [-1, \infty[$ y $\text{Rec}(g) = [-2, \infty[$. (2+2 pts.)

   c) $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = [-2, \infty[-\{2, -2, -1\}$ y $\text{Dom}(f \circ g) = [-2, \infty[-\{15\}$. (2+2 pts.)

   d) $(g \circ f)(1) = -2$ y $(f + g)(0) = 2$. (2+2 pts.)

   e) Se puede verificar que es inyectiva mediante la gráfica (1 pts.), y además $g^{-1}(x) = (x + 2)^2 - 1$ (2 pts.), dónde $\text{Dom}(g^{-1}) = [-2, \infty[$ y $\text{Rec}(g^{-1}) = [-1, \infty[$.(1 pts.)

2) a) Podemos hacer la sustitución $u = 7^x$ y nos queda $u^2 - 7u - 8 = 0$.(5 pts.) Concluimos que $u = 8$ o $u = -1$(2 pts.). Observar que $7^x = -1$ no tiene solución (1 pto.) y $7^x = 8$ tiene como solución $x = \log_7(8)$ (2 pts.), la cual corresponde a la única solución de la ecuación.

   b)

$$
\begin{array}{rcl}
\log(\sqrt{7-x}) & = & \log\left(\sqrt{\log(100)+10}\right) - \log(\sqrt{x+1}) \\
\log((7-x)^{1/2}) & = & \log\left(12^{1/2}\right) - \log((x+1)^{1/2})(2pts.) \\
\frac{1}{2}\log(7-x) & = & \frac{1}{2}\log(12) - \frac{1}{2}\log(x+1) \\
\log(7-x) + \log(x+1) & = & \log(12)(2pts.) \\
\log((7-x)(x+1)) & = & \log(12)(2pts.) \\
-x^2 + 6x + 7 & = & 12 \\
x^2 - 6x + 5 & = & 0(2pts.)
\end{array}
$$

   De dónde concluimos que $x = 5$ o $x = 1$.(2 pts.)

3) a) I)

$$
\frac{\tan(x)+\tan(y)}{\tan(x)-\tan(y)} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(y)}{\cos(y)}} = \frac{\frac{\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)}{\cancel{\cos(x)\cos(y)}}}{\frac{\sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x)}{\cancel{\cos(x)\cos(y)}}} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}
$$

   (Correcto 5 pts. pequeño error 3 pts.)

   II)

$$
\frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{1 - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)})} = \frac{\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cancel{\cos^2(x)}}}{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cancel{\cos^2(x)}})} = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)
$$

   (Correcto 5 pts. pequeño error 3 pts.)

   b) Observar que:

$$
\cot^3(x) - 3\cot(x) = \cot(x)(\cot^2(x) - 3) = 0
$$

   Por lo que tenemos que $\cos(x) = 0$ o $\dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 3$(2 pts.). De esto último tenemos

$$
\begin{array}{rcl}
\cos^2(x) & = & 3\sin^2(x) \\
\cos^2(x) & = & 3 - 3\cos^2(x) \\
\cos^2(x) & = & \dfrac{3}{4} \\
\cos(x) & = & \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2pts.)
\end{array}
$$

Finalmente todas las soluciones son $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$. (1 pto. cada solución)